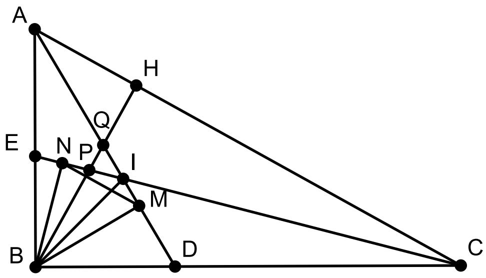
CLASA a IX-A

SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

1. Înălţimea BH dusă pe ipotenuza triunghiului ABC intersectează bisectoarele AD şi CE în punctele Q, respectiv P. Demonstraţi că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor $[QD]$ şi $[PE]$ este paralelă cu dreapta AC.



Soluţie. Dacă a, b, c sunt laturile, atunci

$$\frac{HA}{HC} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{QA}{QD} = \frac{c^2}{a^2}\frac{b+c}{c} = \frac{c}{b-c}, \qquad \textbf{(3 p)}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{b-c}{b}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{b}\overrightarrow{BD}, \qquad \textbf{(1 p)}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{b-c}{2b}\overrightarrow{BA} + \frac{c+b}{2b}\overrightarrow{BD} = \frac{b-c}{2b}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{2b}\overrightarrow{BC} \qquad \textbf{(1 p)}$$

şi, analog, $\overrightarrow{BN} = \frac{b-a}{2b}\overrightarrow{BC} + \frac{a}{2b}\overrightarrow{BA}$, de unde

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2b}\Big((b-a-c)\overrightarrow{BC} + (a-c-b)\overrightarrow{BA}\Big) = \frac{a+c-b}{2b}\overrightarrow{CA},$$

ceea ce dovedeşte concluzia. **(2 p)**

2. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice interval deschis şi mărginit I, mulţimea $f(I)$ este un interval deschis, de aceeaşi lungime cu I.

Soluţie. Arătăm că funcţiile care convin sunt cele de forma $f(x) = x + c$, precum şi cele de forma $f(x) = -x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (este evident că acestea verifică cerinţa). **(1 p)**

Pentru aceasta arătăm că

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Într-adevăr, dacă $a < b$ şi $d = b - a$, atunci imaginea intervalului $I = (a-d, b+d)$ este un interval deschis J de lungime $3d$, iar imaginile intervalelor $(a-d, a)$, (a, b), $(b, b+d)$ sunt trei intervale deschise J_1, J_2, J_3 astfel încât fiecare are lungimea d şi $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \{f(a)\} \cup \{f(b)\}$. Aceasta nu este posibil decât dacă J_1, J_2, J_3 sunt disjuncte iar $f(a)$ şi $f(b)$ sunt punctele care împart J în trei părţi egale, deci $|f(a) - f(b)| = d$. **(4 p)**

Din (1) deducem $|f(x) - f(0)| = |x|$, deci $f(x) = c \pm x$, unde $c = f(0)$. Apoi, din $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$, în cazul $f(1) = c + 1$ rezultă $f(c) = c + x$ pentru orice x, iar în cazul $f(1) = c - 1$ rezultă $f(c) = c - x$ pentru orice x. **(2 p)**

3. Demonstraţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale pozitive, atunci

$$4\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1}\right) \leq$$
$$\leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Soluţie. Dacă notăm $x_{n+1} = x_1$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 - x_{i+1}^3}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - x_{i+1}^2 + \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}}.$$

(3 p)

Pe de altă parte, $\dfrac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \leq \dfrac{1}{2} x_{i+1}\left(x_{i+1} - x_i\right)$; prin adunarea acestor inegalităţi pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ obţinem concluzia. **(4 p)**

4. Pe o masă sunt $k \geq 2$ grămezi având $n_1, n_2, \ldots$, respectiv n_k creioane. O *mutare* constă în alegerea a două grămezi având a, respectiv b creioane, $a \geq b$ şi transferarea din prima grămadă în cea de-a doua a b creioane.

Determinaţi condiţia necesară şi suficientă pentru $n_1, n_2, \ldots, n_k$, astfel încât să existe o succesiune de mutări prin care toate creioanele sunt transferate în aceeaşi grămadă.

Soluţie. Condiţia este $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)/d = 2^m, m \in \mathbb{N}^*$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. **(1 p)**

Într-adevăr, dacă a, b sunt numere naturale, atunci $(a - b, 2b) = (a, b)$ sau $(a - b, 2b) = 2(a, b)$ deci, după orice mutare, cel mai mare divizor comun al numerelor creioanelor din grămezile rămase se păstrează sau se înmulţeşte cu 2. În final rămâne o grămadă cu $n_1 + \ldots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$ creioane. **(3 p)**

Reciproc, dacă $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$, atunci demonstrăm prin inducţie după m că există o succesiune de mutări prin care toate creioanele se pot transfera în aceeaşi grămadă.

În cazul $m = 1$ avem două grămezi cu $n_1 = n_2$ creioane, deci după o mutare obţinem o singură grămadă.

Presupunem apoi că afirmaţia este adevărată pentru $m \leq p$ şi orice d. În situaţia $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2^{p+1}d$, cardinalul mulţimii

$$A = \{i \mid 1 \leq i \leq k, n_i/d \text{ este impar}\}$$

este număr par, deci putem grupa două câte două grămezile cu $n_i, i \in A$ elemente şi, efectuând câte o mutare în fiecare grupă, obţinem grămezi cu $n'_1, \ldots, n'_l$ creioane, cu $n'_1 + \ldots + n'_l = 2^q(n'_1, \ldots, n'_l)$, $q \leq p$. Conform ipotezei de inducţie, de aici avem o succesiune de mutări care deplasează toate creioanele în aceeaşi grămadă. **(3 p)**